Lineare Algebra

Übungsstunde 1

1. Orga
2. GA: Reflexion
3. Priorisierte Wiederholung
4. Recap: A0
5. Nächste Woche
6. Quiz

1. Orga

- Ich war in Paris!

  ↳ Verzögerung Bewertung (normalerweise noch am M1)

  ↳ kein Quiz, Fokus auf Wiederholung und A0

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 1
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

3. Priorisierte Whl.

Skalarprodukt

- Wird noch ausführlicher behandelt. (bzw. Allgemein)

  $\boxed{\langle x, y \rangle := x^T y}$ liefert eine Zahl! $\boxed{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

- Norm $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}}$, bzw. Länge vom Vektor x

- Winkel: $\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$

- $\boxed{x, y \text{ orthogonal zueinander, iff } \langle x, y \rangle = 0}$

- Cauchy-Bujakovski-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$

- iff := if and only if
- orthogonal = senkrecht!!

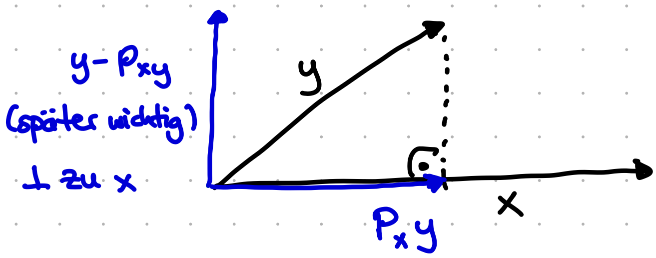
- Warum, wofür Skalarprodukt?

  ⇒ Weil man einfach prüfen kann, ob zwei Vektoren orthogonal sind, oder nicht

- Besonderheit vom Skalarprodukt und Norm:

  bilden Vektoren auf Zahlen (Skalare) ab!

- Skalarprodukt Graphisch:



$:= uu^T x$

mit $u := \frac{x}{\|x\|}$

- $\langle x, y \rangle := \|P_x y\| \cdot \|x\|$
- Wir multiplizieren Länge y projiziert auf x mit Länge von x selbst.

- Warum $\langle x, y \rangle = 0$ wenn $x \perp y$? (orthogonal)

  $\Rightarrow \|P_x y\| = 0$

  $\Rightarrow 0 \cdot \|x\| = 0$ □

Definition Matrix

- Matrix: $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ist eine $\boxed{m \times n}$ Matrix

  $m :=$ Anzahl Zeilen
  $n :=$ Anzahl Spalten

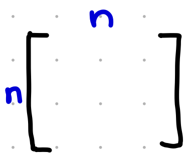
  Zeile zuerst!

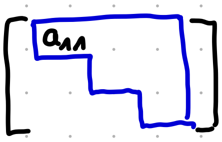
- Koeffizient $\boxed{a_{ij}}$ an $\boxed{\text{Zeile } i}$ und $\boxed{\text{Spalte } j}$
  $i/j = 1, \dots, m/n$

Besondere Matrizen

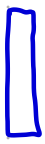
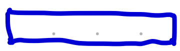
- Identitäts-/Einheitsmatrix: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$, $A \cdot I = A$, A beliebig
  - genauer für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratisch: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$
    , $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allgemein: $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$

- Nullmatrix: $0 = \begin{bmatrix} \text{Nur 0en} \end{bmatrix}$, $A \cdot 0 = 0$, A beliebig

- Quadratische Matrix: $n \times n$ 
  $\hookrightarrow$ regulär, falls voller Rang | singulär, sonst

- Obere Dreiecksmatrix:  $\square$ Kann $\neq 0$ sein

- Diagonalmatrix:  $\square$ Kann $\neq 0$ sein

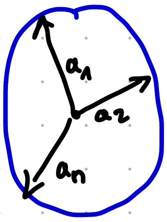
- Spaltenvektor: $m \times 1$ 
- Zeilenvektor: $1 \times n$ 

Spaltenraum

- Spaltenraum $\boxed{C(A) = \{ Ax : x \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m}$ $= \text{span}\{A\}$

  $\boxed{\text{Menge aller Linearkombinationen aus } A}$

(= Menge aller möglichen Vektoren, die aus $a_1, \dots, a_n$ linear kombiniert werden können)



span $\{a_1, \dots, a_n\}$ ist ein Vektorraum, aufgespannt von Vektoren $a_1, \dots, a_n$

Bsp: $\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$

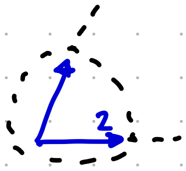
bzw. $= \boxed{\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}}$

- $\boxed{\text{rang}\, A = \#\ \text{linear unabhängige Spalten von } A}$

  = Dimension des $C(A)$

Lineare Abhängigkeit

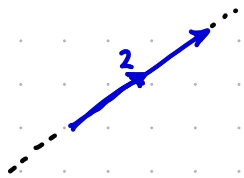
- Linear unabhängig: Kein Vektor aus einer Menge lässt sich aus anderen kombinieren



Vektor $\xrightarrow{2}$ erweitert den Raum

  - Falls die LK $\boxed{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0}$ iff $\boxed{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}$

- Linear abhängig: $\exists$ Vektor, der sich kombinieren lässt



Vektor $\xrightarrow{2}$ trägt nix zum Raum bei, keine neue Information

4. Recap: A0

1. Linear combinations of vectors (hand-in) (★☆☆)

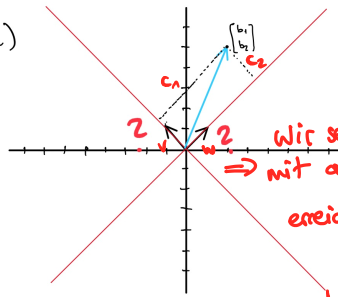
a) Prove that every vector in $\mathbb{R}^2$ can be written as a linear combination of $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Consider the two vectors $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Give a vector in $\mathbb{R}^3$ that cannot be written as a linear combination of $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$. Justify your answer.

• Eure Lösungen:

1.

a)



Kein Beweis!

↳ erläutern

Wir sehen

$\Rightarrow$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ erreichen wir jeden Vektor $\binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2$ durch LK mit v, w: $c_1 v + c_2 w = \binom{b_1}{b_2}$.

• Graphen beweisen nix ← erläutern!

↳ fine wenn für Visualisierung, als Hilfe zum Beweis

1.a) geg.: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c \cdot v + d \cdot w = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $c, d, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ arbitrary.

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned} c - d &= b_1 \\ + \quad c + d &= b_2 \\ \hline 2c &= b_1 + b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow c = \frac{b_1 + b_2}{2}$

Einsetzen: $\frac{b_1 + b_2}{2} + d = b_2 \quad | \cdot 2$

• Variablen immer genau definieren:

↳ „c" könnte sonst alles sein und fixed auf z.B $c = \begin{pmatrix} -\pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$

Wir wollen (meinen) jedoch $c \in \mathbb{R}$ und c frei wählbar!

$2c = b_1 + b_2$

Antwort: $c = \frac{b_1 + b_2}{2}$

$d = \frac{b_1 - b_2}{2}$

any vector $\binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2$ can be lin. comb. with v, w by choosing

• So what?

↳ Warum beweist die Antwort die Aussage?

1. Linear combinations of vectors

a) Every vector in $\mathbb{R}^2$ can be written as a linear combination of $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $\vec{w} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, since $\vec{v}$ and $\vec{w}$ are linearly independent from each other. nice

To prove this, the equation $a \cdot \vec{v} = \vec{w}$ with $a \in \mathbb{R}$ must have no ~~equal~~ solution. $a \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}$

Since w_1 is -1 and w_2 is 1, both coordinates of the vector are different, but in the case of $\vec{v}$ they are the same. This means that $\vec{v}$ and $\vec{w}$ are linearly independent and can combine to every other vector in their plane (which is the same as $\mathbb{R}^2$ here) by linear combination. ok!

$\Rightarrow$ Every vector in $\mathbb{R}^2$ can be written as a linear combination of $\vec{v}$ and $\vec{w}$. nice

Formula: $\vec{r} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$, $r \in \mathbb{R}^2$

- zu viel Text, top für Verständnis aber nicht für die Prüfung

↳ Empfehlung: macht beides oder nur das Letztere
↑
kurz und präzise

a) To prove that every vector in $\mathbb{R}^2$ can be written as a a linear combination of $v = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $w = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, there should exist $c = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ (irgendwelche vector in $\mathbb{R}_2$)

$$\vec{c} = x \cdot \vec{v} + y \cdot \vec{w}$$

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} c_1 &= x - y \\ c_2 &= x + y \end{aligned}$$

We have 2 unknowns and 2 different equations. This mean for any c_1 or c_2 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ there exists a solution

$$\begin{aligned} c_1 &= x - y \\ + \quad c_2 &= x + y \\ \hline c_1 + c_2 &= 2x \\ x &= \frac{c_1 + c_2}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 &= x - y \\ - \quad c_2 &= x + y \\ \hline c_1 - c_2 &= -2y \\ \frac{c_1 - c_2}{-2} &= y \end{aligned}$$

Sehr nice! :)

- Nice!

5. Nächste Woche (2)

- Matrix Multiplikation
- Matrix Eigenschaften
- Lineare Gleichungssysteme LGS ($Ax = b$)
  - Rückwärtseinsetzen (Back substitution)
  - Gauss - Verfahren (Elimination)
    - Pivot, Pivotzeile (Pivot row)
    - Zeilenoperationen (Row operations)
  - Inverse Theorem
  - Kosten für Elimination, Substitution
- LU - Zerlegung (LU - decomposition)
  - Permutation
- Transponierte (Transpose A^T)
- Symmetrische Matrix

Maybe ^^.

1. Linear combinations of vectors (hand-in) (★☆☆)

a) Prove that every vector in $\mathbb{R}^2$ can be written as a linear combination of $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

b) Consider the two vectors $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Give a vector in $\mathbb{R}^3$ that cannot be written as a linear combination of $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$. Justify your answer.

- **Meine Lösung:**

a) We show that $\operatorname{span}\{v, w\} = \mathbb{R}^2$.

- v and w are Lin. ind. since there exists no $\alpha \in \mathbb{R}$ such that

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

- this makes $\dim(\operatorname{span}\{v, w\}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow \operatorname{span}\{v, w\} = \mathbb{R}^2$, since $v, w \in \mathbb{R}^2$. $\square$

b) ex: $x = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Proof: Assuming $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\leftarrow$ Beweis durch Widerspruch (seht ihr dann in Diskmath)

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0 \text{ but } \alpha_2 = 1 \ \lightning$$

Hence x can not be linearly combined by v and w. $\square$

So in etwa würde ich in der Prüfung lösen.

6. Quiz

- Heute leider auch nicht