Lineare Algebra

Übungsstunde 10

1. Orga
2. GA
3. Recap: Letzte Übungsstunde
4. Priorisierte Wiederholung
5. Recap: A9
6. Aufgaben
7. Nächste Woche

1. Orga

- Good ($\wedge$ bad) news: ihr macht Basiswechsel!

  ↳ bad: nicht so easy

  ↳ good: das Thema ist sehr nice!!

  + ihr versteht dadurch Linalg $\wedge$ SVD, ... noch besser

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 9

  ↳ Worum gings

  ↳ ...

- [5 Minuten] Wann ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar?

  (1) Generell rank $A = 2$ full rank

  (2) Was muss für a, b, c, d gelten?

- Lösung:

  (1) Generell regulär, voller Rang, rang $= 2$

  (2) Bonus: Was muss für a, b, c, d gelten?

  Wir wissen: Eine Matrix ist genau dann singulär, falls $\det A = 0$ gilt.

  $\Rightarrow$ A ist invertierbar, falls $\det A \neq 0$

  Da $\det A := ad - bc \Rightarrow$ A ist invertierbar, falls $\boxed{ad - bc \neq 0}$ $\square$

- Btw: die beiden Begriffe regulär ∧ singulär sind dieses Jahr wie es aussieht nicht relevant aber super hilfreich:

  - A, $n \times n$, rank $A = n \Leftrightarrow A$ regulär $\Leftrightarrow A$ invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim N(A) = 0$
  - A, $n \times n$, rank $A < n \Leftrightarrow A$ singulär $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \dim N(A) > 0$

↳ Key intuition!

3. Recap: Ü9

Test 2

- $\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|^2$

  $\|A\hat{x} - b\|^2 = \min_x \|Ax - b\|^2$

- Falls ≤ 3 Fehler: sehr gut!

  > 6 Fehler: schaut euch die Themen nochmal an

Gram-Schmidt

- $\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{l.u.}} \xrightarrow{\text{G-S}} \underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\text{orthonormal}}$

(1) Bei G-S nie shortcuts machen!

↳ der Algo muss vollständig angewendet werden, nur dann funktioniert er

↳ d.h. auch wenn gesucht orthogonale Basis

(2) Schaut, dass ihr paar ordentliche Ausführungen geschafft habt

sehr nice!

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left((0\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$q_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left((1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \left((1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}$$

nice!

4. Priorisierte WhL.

Determinanten

- Permutation: $n!$ $\boxed{\text{verschiedene Anordnungen}}$ von $S_n = 1, \dots, n$
- Determinante: $\boxed{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \to \det A \in \mathbb{R}}$ $= |A|$, <u>wichtig</u>: Wir betrachten $n \times n$ Matrizen!

<u>wobei</u>: $\boxed{\det A := \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign} p \cdot a_{1,p(1)} \cdot a_{2,p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}}$ det := Summe aller möglichen Permutationen mit (-1) optional

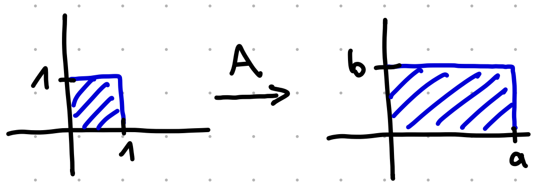
<u>mit</u>: $\operatorname{sign} p = \begin{cases} +1, & \text{gerade Anzahl an Vertauschungen} \\ -1, & \text{ungerade \# \dots} \end{cases}$

Permutationen einer 3x3 Matrix

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} (1,2,3)$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} (3,1,2)$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} (2,3,1)$

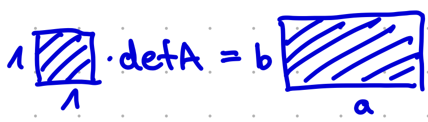
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} (2,1,3)$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} (1,3,2)$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} (3,2,1)$

Geometrisch



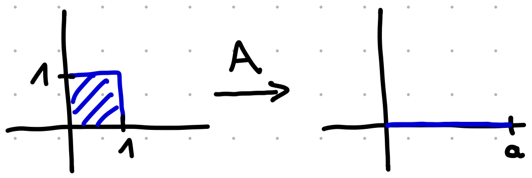
$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ „$\det A :=$ Flächenänderung durch A"

$\det A = ab$



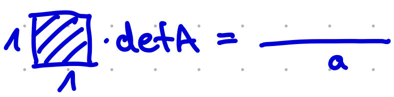
D.h., wenn wir eine singuläre Abbildung haben bzw. $N(A) \neq \{0\}$, $\dim N(A) \geq 1$:

$\Rightarrow$



$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ singulär

$\boxed{\det A = a \cdot 0 = 0}$



Wichtig

- $\boxed{\det A = 0}$: mind. eine dim $\to 0$ (A singulär, $\dim \operatorname{Ker} \neq 0$)
- $\boxed{\det A = 1}$: keine Flächenänderung (Einheitsmatrix, Scherung, Rotation, ...)
- $\boxed{\det A < 0}$: gespiegelt (ungerade oft)

Eigenschaften

- Linear auf jeder Zeile:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} + \lambda' a'_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} + \lambda' a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \lambda' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$

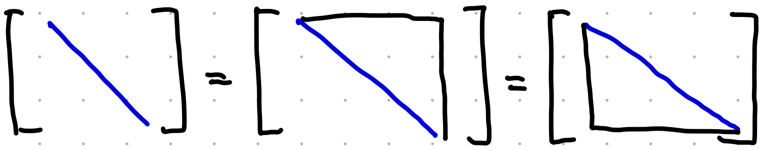
- Zeilenvertauschungen wechseln das Vorzeichen von det A

$$\det \begin{bmatrix} \vdots \\ — a_k — \\ — a_l — \\ \vdots \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \vdots \\ — a_l — \\ — a_k — \\ \vdots \end{bmatrix}$$

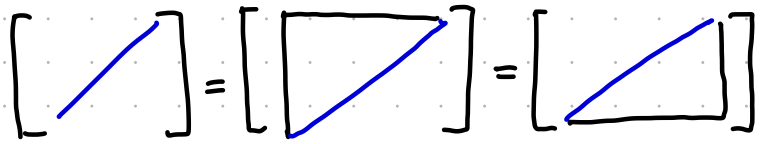
- Zeilen auf Zeilen addieren ändert nicht die Determinante

$$\det \begin{bmatrix} \vdots \\ — a_k — \\ — a_l — \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\lambda a_k \end{matrix} = \det \begin{bmatrix} \vdots \\ — a_k — \\ — a_l + \lambda a_k — \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ — a_k — \\ — a_l — \\ \vdots \end{vmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} \vdots \\ — a_k — \\ — a_k — \\ \vdots \end{vmatrix}}_{0}$$

- $\det A = \begin{cases} \neq 0, & \text{A ist regulär } \operatorname{rang} A = n,\ N(A) = \{0\}. \\ = 0, & \text{A ist singulär } \operatorname{rang} A < n,\ \dim N(A) \geq 1 \end{cases}$

- A = 

$\Rightarrow$ det A = Produkt aus ———

- A = 

$\Rightarrow \det A = (-1) \cdot$ Produkt aus ——

Rechnen

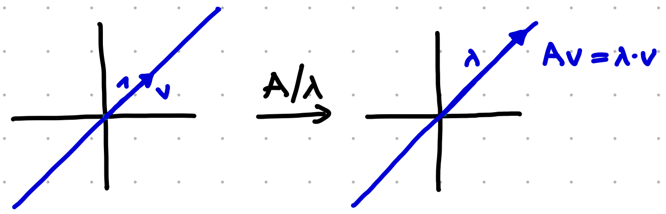
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(A+B) \neq \det A + \det B$
- $\det(A^T) = \det A$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ iff A ist regular
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A^n) = \det(A)^n$

Einleitung: Eigenwerte ∧ Eigenvektoren

- Wir schauen uns besondere Vektoren v an, wobei gilt, dass:

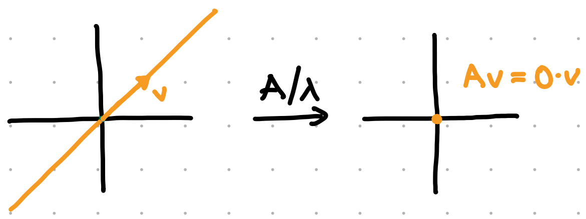
  $\boxed{Av = \lambda v}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ ∧ A ist $n \times n$!

  Das heißt geometrisch:



- A entspricht für Vektoren span{v} einfach einer skalaren Mult. mit λ.
- Ebenfalls nice: Was passiert wenn für A ∃λ mit λ = 0?

  ↳ Dann ist A singular!!



5. Recap: A7

- Eure Lösungen
-

(nur drei Abgaben erhalten, btw.)

- **Meine Lösung**

1. **Properties of pseudoinverses (hand-in)** (★★☆)

   This is Challenge 23 from the lecture notes.

   Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ be arbitrary matrices.

   a) Prove that if $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = n$, we have $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

   b) Prove that $(A^\top)^\dagger = (A^\dagger)^\top$.

   c) Prove that $AA^\dagger$ is symmetric and that it is the projection matrix for the subspace $\mathbf{C}(A)$.

   d) Prove that $A^\dagger A$ is symmetric and that it is the projection matrix for the subspace $\mathbf{C}(A^\top)$.

- siehe ML ^^

  ↳ fokussiert euch auf die Prioritäten

  ↳ nicht sehr entscheidend für Linalg, mehr „Knobelaufgabe"

  ↳ packts gerne auf den Spick!

  ↳ zur Pseudoinverse ist am wichtigsten:

  - Fall: $n \times n$, rank $A = n$: $A^{-1}A = A^{-1}A = I$
  - Fall: $m \times n$, rank $A = n$: $A^+A = \underbrace{(A^TA)^{-1}A^T}_{A^+}A = I$
  - Fall: $m \times n$, rank $A = m$: $AA^+ = A\underbrace{A^T(AA^T)^{-1}}_{A^+} = I$
  - Fall: $m \times n$, rank $< m$, rank $< n$: $A^+ = (ST)^+ = T^+S^+$ wobei rank $S = n$, rank $T = m$
  - Fall: alles: $A^+ = U\Sigma V^T$

6. Aufgaben

(1) Gegeben $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Berechne:

a) $ref(A)$, b'

b) Die Lösungsmenge L_b des LSE: $Ax = b$

c) Eine Basis des $C(A)$

d) Eine Basis des $N(A)$

(*) schreibe L_b um mit Hilfe von $N(A)$

e) Betrachten wir nun A als Abbildung, vervollständige die Zeichnung

e) Die Determinante $\det A$

*) Einen Eigenwert ∧ die dazugehörigen Eigenvektoren

Für die Schnellen:

(2) Gleiche Aufgabe mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung

(1) Gegeben $Ax=b$ mit $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\3&0&3\\0&4&8\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$

Berechne:

$\boxed{a)}$ ref(A), b'

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&5&0\\3&0&3&6\\0&4&8&-4\end{array}\right]\begin{matrix}\\-3\mathrm{I}\\ \\\end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&5&0\\0&-6&-12&6\\0&4&8&-4\end{array}\right]\begin{matrix}\\:(-6)\\+\frac{2}{3}\mathrm{II}\end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&5&0\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{ref}(A)=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\ b'=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\boxed{b)}$ Die Lösungsmenge L_b des LSE: $Ax=b$

$\Rightarrow x_3=t\in\mathbb{R}$

Aus II: $x_2=-1-2t$

I: $x_1=2+4t-5t=2-t$

$\Rightarrow x=\begin{pmatrix}2-t\\-1-2t\\t\end{pmatrix}$, $L_b=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$L_b=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+ \text{"}N(A)\text{"}\right\}$

$\boxed{c)}$ Eine Basis des C(A)

rank $A=2 \Rightarrow \dim C(A)=2$

Basis C(A): $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{d)}$ Eine Basis des N(A)

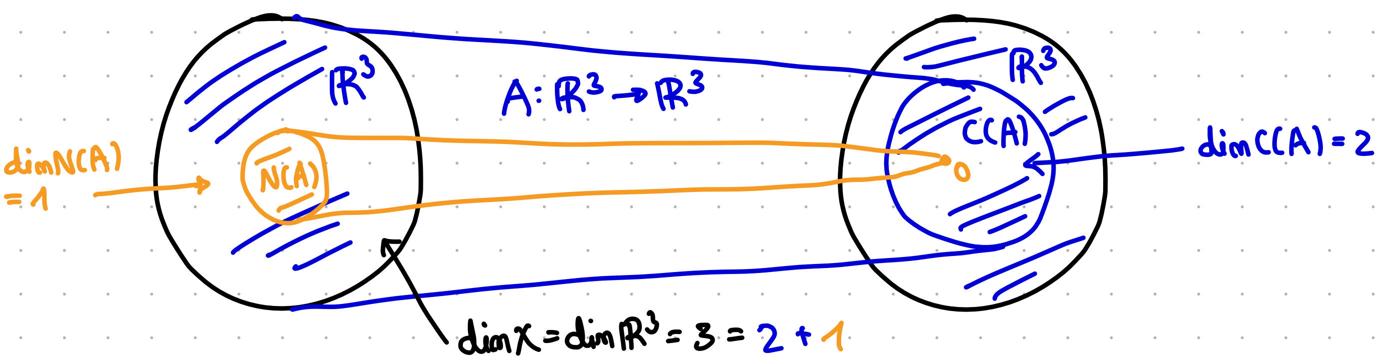
#freie Var $=1 \Rightarrow \dim N(A)=1$

Basis N(A): $\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{(*)}$ schreibe L_b um mit Hilfe von N(A)

$$L_b=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+x_0,\ x_0\in N(A)\right\}=\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\text{partik}}+\underbrace{\mathrm{span}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\text{spez.}}\Big\}$$

e) Betrachten wir nun A als Abbildung, vervollständige die Zeichnung



$\boxed{e)}$ Die Determinante det A

rank $A=2<3 \Rightarrow A$ ist singular $\Rightarrow \det A=0$

$\boxed{*)}$ Einen Eigenwert ^ die dazugehörigen Eigenvektoren

A ist singular $\Rightarrow N(A)\neq\{0\}$

$\Rightarrow \forall v\in N(A):\ Av=0v$

$\Rightarrow$ Eigenwert: $\lambda=0$

Eigenvektoren: $v\in N(A)$

$=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

(2) Gleiche Aufgabe mit $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

e) $\det A = 1\cdot 2-3\cdot 0 = 2-0=2$

*) $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b\\2b\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ EW: $\lambda=1$, EV: span$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

(3) mit $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&7\\-3&3&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

e) keine det da nicht $n\times n$!

*) ebenso!

7. Nächste Woche (11)

- Komplexe Zahlen
- Eigenwerte und Eigenvektoren
- Basiswechsel