Lineare Algebra

Übungsstunde 2

1. Orga
2. GA: Reflexion
3. Recap: A1
4. Priorisierte Wiederholung
5. Aufgaben
6. Nächste Woche
7. Quiz

1. Orga

- Quiz parat!
- Alle Begriffe nun auch hier primär auf Englisch
  - ↳ Prüfungssprache per Default ist Englisch, Deutsch möglich
  - ↳ Ihr könnt aber immer auch auf Deutsch antworten
- Die Übungsstunde fokussiert sich auf das Lineare Algebra Verständnis
  - ↳ viele Vorlesungsthemen wie Computation Trees, Fibonacci, Beweise, ...
    evtl. Prüfungsrelevant aber sicher

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 2
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

3. Recap: A1

- Eure Lösungen

1. Rank and linear independence (hand-in) (★☆☆)

a) Are the following three vectors in $\mathbb{R}^3$ linearly independent?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Are the following three vectors in $\mathbb{R}^4$ linearly independent?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) What is the rank of the following 2×3 matrix A?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

d) What is the rank of the following 3×3 matrix A? You may use the (yet unproven) statement from the lecture that says that one can choose any order on the columns of a matrix to compute its rank.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sehr nice, viele haben die Variablen definiert!

b) Ja ✓ Warum?

c) $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$ ✓

d) $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3$ ✓

Warum? Siehe 1

1

- Immer die Antwort justifyen (begründen), falls nicht explizit steht: „keine Begründung nötig"

Since there no constants (besides 0) that could be multiplied with the vectors such that $c_1 \cdot u + c_2 \cdot v + c_3 \cdot w = 0$ the vectors are independent.

false, c_2 could be arbitrary since $c_2 \cdot 0 = 0$. (as $v = 0$)

2

- 0-Vektor ist per Def. linearly dependent weil
  ↳ $\forall v,\ 0 \cdot v = \vec{0}$

- Weiterer Hinweis: Es gilt per Def. Lin. ind.:

Falls $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$, dann muss $c_1 = \dots = c_n = 0$ sein

Das heißt <u>nicht</u> dass bei Lin. dep. <u>alle</u> $c_1, \dots, c_n \neq 0$ sein müssen!

Siehe: für $r, s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Auch bei Lin dep <u>können</u> einige $c_1, \dots, c_n = 0$ sein, halt nur nicht alle.

- Der Nullvektor ist immer linear abhängig, da

$0 \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ✓

- u und w sind linear unabhängig.

$c \cdot u + d \cdot w = 0$ ✓

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3c + d \\ -6c + -3d \\ 3c + 4d \end{bmatrix} = 0$ ✓

$\Rightarrow d = -3c$ und $c = -\frac{4}{3} d$ ✓

$\Rightarrow d = -\cancel{3} \cdot (-\frac{4}{\cancel{3}} d)$ $\quad d = 4d$ ✓

$\Rightarrow d = 0$ $\quad c = -\frac{4}{3} \cdot 0 = 0$ ✓

Conclusion? Sonst top!

siehe 3

3

- immer darauf achten was genau die Aufgabe fordert
  ↳ hier geht es um die Lin ind von allen Vektoren u, v, w

1d) 3 weil alle Vektoren sind unabhängig von einander

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underbrace{a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{A} \quad \underbrace{b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \quad \underbrace{c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C}$$

Achtung: Das zeigt nicht, dass die 3 Vektoren zusammen lin. ind. sind!

$A \neq B$ wenn $a,b \neq 0$ ✓

$B \neq C$ wenn $b,c \neq 0$ ✓

$A \neq C$ wenn $a,c \neq 0$ ✓

Ebruli Esin Dogan

pair-wise lin ind $\not\Rightarrow$ lin. ind.

Counterexample: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind lin dep, aber pair-wise lin. ind.

4

- Pair-wise lin. ind $\not\Rightarrow$ lin. ind.

- **Meine Lösung:**

1. Rank and linear independence (hand-in) (★☆☆)

a) Are the following three vectors in $\mathbb{R}^3$ linearly independent?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Are the following three vectors in $\mathbb{R}^4$ linearly independent?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) What is the rank of the following 2×3 matrix A?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

d) What is the rank of the following 3×3 matrix A? You may use the (yet unproven) statement from the lecture that says that one can choose any order on the columns of a matrix to compute its rank.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Since $v = 0$, we have $v = 0 = 0 \cdot u = v \cdot u$, hence no, lin. dep.

b) We see that with Elimination

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

with $\operatorname{rank} U = 3$, hence u, v, w lin. ind.

c) Since only first two columns are lin. dep, the number of ind. columns is 2.

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = 2$.

d) We see that with Elimination

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

with $\operatorname{rank} U = 3$, hence u, v, w lin. ind.

Alternative since $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

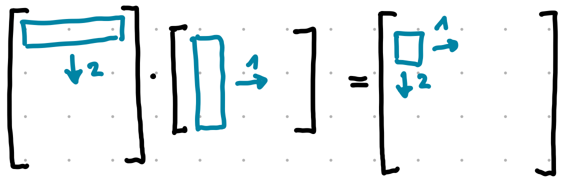
$$\det A = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 = -2$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \dim A = 3.$$

4. Priorisierte Whl.

Multiplikation

- Multiplikation $A \cdot B$: $m \times n \cdot n \times p = m \times p$



- Wichtig:
  - $AB \neq BA$, sprich nicht immer kommu, auch bei $n \times n$ Matrizen!
  - $A(B+C) = AB + AC$ distributiv bzw. auch $(A+B)C = AC + BC$
- Tipp: Ein Beispiel auf dem Spick!

CR-Decomposition

- $A = CR$ wobei $\boxed{\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boxed{C \in \mathbb{R}^{m \times r}}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times n}$

Falls $\boxed{w = u + v}$: $\begin{bmatrix} | & | & | \\ v & u & w \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

C ist die „lin. ind." Version von A

z.B. $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Definition LGS

- $Ax = b$ $\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \iff \begin{array}{c} x_1 \, x_2 \, \dots \qquad x_n \\ \left[\begin{array}{c|c} \quad A \quad & b \end{array}\right] \end{array} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}}_{\text{Linearkombination von } b \text{ durch } x_1, \dots, x_n}$

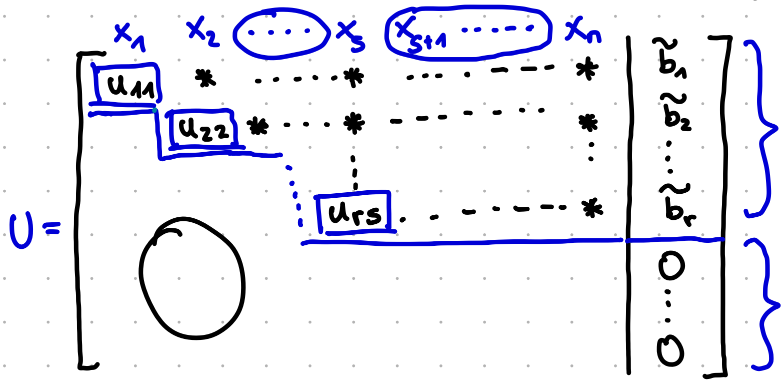
Daher die Intuition: „Gibt es eine Linearkombination $\Leftarrow$

aus $a_1 \cdots a_n$ für b ?"

Hinweis: später kommt noch eine andere „Linear transformation Intuition".

Triangular Form (Zeilenstufenform)

- $Ax = b \rightsquigarrow Ux = c$, mit U in triangular form



- r □ Pivots (Pivot-rows) $\Rightarrow \text{rank}(A) = r$
- $n-r$ ○ free variables (freie Variablen)
- $m-r$ Zero-rows (Verträglichkeitsbedingungen)

Solve LGS, Elimination + Backsubstitution (Gauß-Verfahren)

Lösungsmenge $\{x\}$

- Ziel: LGS lösen: 1. Elimination

Es gilt: $Ax = b \rightsquigarrow Ux = c$

wobei U ist A in triangular form

und: $\boxed{\text{Lösung von } Ax = b \Leftrightarrow \text{Lösung von } Ux = c}$

$$[A], [b] \qquad [A \mid b]$$

↓ Elimination

$$\underbrace{\dots EPEEPEE \cdot [A]}_{U}, \quad \underbrace{\dots EPEEPEE\, [b]}_{c} \qquad [\underbrace{\ \ }_{U} \mid c]$$

2. Backsubstitution

5. Aufgaben

Matrix Multiplikation

- Bsp: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Berechne: $A \cdot B$ (0. Schauen ob definiert ...)

$\boxed{1}$ Verdeutlichen, wie die Ergebnismatrix aussieht!

- es gilt immer: $m \times n \cdot n \times p = m \times p$

$\Rightarrow$ $2 \times 3 \cdot 3 \times 3 \Rightarrow$ wir bekommen eine 2×3 Matrix

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ Rechnen, so wie es Sinn macht

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-3)\cdot 0 + 5\cdot 4 & 1\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 5\cdot 3 & 1\cdot 4 + (-3)\cdot 2 + 5\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 4 & 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 & 0\cdot 4 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 10 & 8 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Solve LGS (Elimination + Backsubstitution)

Bsp:

I: $x + y - z = 3$

II: $x + 2y - 2z = 2$

III: $2x - y + 2z = 15$

[0] In die Matrixform $Ax = b$ bringen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

[1] Elimination step ($Ax = b \rightsquigarrow Ux = c$)

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E_{21}b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \text{II} + (-\text{I})$$

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad E_{31}E_{21}b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \text{III} + (-2\text{I})$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{E_{32}E_{31}E_{21}A}_{=U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{E_{32}E_{31}E_{21}b}_{=c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \text{III} + (3\text{II})$$

[2] Backsubstitution (Rückwärtseinsetzen)

Aus III: $\boxed{x_3 = 6}$

Aus II: $x_2 - x_3 = -1$

$x_2 - 6 = -1$

$\boxed{x_2 = 5}$

Aus I: $x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$x_1 + 5 - 6 = 3$

$\boxed{x_1 = 4}$

[3] Lösung angeben

$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, Löst $Ux = c \implies$ daher auch $Ax = b$.

wobei $U = E_{32}E_{31}E_{21}A$, $c = E_{32}E_{31}E_{21}b$.

Btw: $A = LU$ (LU-decomposition, nächste Woche)

kommt zustande durch:

$$U = E_{32}E_{31}E_{21}A$$

$$\iff \underbrace{E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}}_{=L\text{, untere Linksdreiecksmatrix}} U = A$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -e_{21} & 1 & 0 \\ -e_{31} & -e_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{1}$

$\boxed{*}$ Falls nicht explizit erwähnt, Elimination mit diesem ↑ Algo zu lösen, hier eine viel schnellere Alternative: (Gauß elimination method), <u>Gleiche Idee</u>

Ins Schema:
$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 15 \end{array}\right]$$

○ = Pivot
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Pivotzeile} \\ +(-1\,\mathrm{I}) \\ +(-2\,\mathrm{I}) \end{array}$$

Basically $[E_{31}E_{21}A \mid b]$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{Pivotzeile} \\ +3\,\mathrm{II} \end{array}$$

Basically $[E_{32}E_{31}E_{21}A \mid b]$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{U} & \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{matrix}}_{c} \end{array}\right]$$

Elimination, Ugly Cases

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \text{ lin. dep.,} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lin. dep.

Wird noch in Detail behandelt was man dann macht!

Zero-rows deuten:

- Sei $* :=$ random Zahl
- Sei $*_0 :=$ random Zahl $\neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\text{——}} & - \\ \multicolumn{3}{c|}{\text{——}} & - \\ 0 & 0 & 0 & *_0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\text{——}} & - \\ \multicolumn{3}{c|}{\text{——}} & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$0 \cdot x_n \neq *_0$, keine Lsg!

$0 \cdot \underbrace{x_n}_{\text{egal was}} = 0$ $\longrightarrow$ hat Lsgn!

- nicht verwechseln mit:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\text{——}} & - \\ \multicolumn{3}{c|}{\text{——}} & - \\ 0 & 0 & * & 0 \end{array}\right]$$

$* \cdot x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0$, eindeutige Lösung

In 2-3 Wochen.

Rank bestimmen

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} U = \operatorname{rank} A = 2 \text{, Anzahl der Pivots}$$

man braucht meistens die triangular form.

6. Nächste Woche (2)

- Lineare Gleichungssysteme LGS ($Ax = b$)
  - Inverse Theorem
  - Kosten für Elimination, Substitution
- LU-Zerlegung (LU-decomposition)
  - Permutation
- Transponierte (Transpose A^T)
- Symmetrische Matrix

7. Quiz

- Kahoot.it