Lineare Algebra

Übungsstunde 8

1. Orga
2. GA
3. Priorisierte Wiederholung
4. Recap: A7
5. Aufgaben
6. Nächste Woche
7. Recap + Mehr: Linear Transformations
8. Quiz

1. Orga

- Schaut euch 3 Blue 1 Brown an!
- Doch Linear Transformations direkt!

  ↳ nächste Woche

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind : Vorlesungen Woche 7
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...
- [10 Minuten] Ihr dürft selbst TAs sein!

3. Priorisierte Whl.

Einleitung: Least □s

- Wenn wir ein overdetermined LSE (mehr Zeilen als Spalten) betrachten:

$$\boxed{A}\,\boxed{x} = \boxed{b}$$

Da $\exists b$ mit $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|c} \ddots & \vdots \\ 0\ 0\ 0\ 0 & * \\ 0\ 0\ 0\ 0 & * \end{array}\right]$, $* \neq 0 \Rightarrow ↯ \Rightarrow$ keine Lsg.

so können wir mit Sicherheit sagen, dass $\exists b$ mit $Ax = b$ hat keine Lsg.

- Methode kleinster □: Zumindest aber finden wir für $Ax \neq b$ ein $\tilde{x}$ sodass

$$\|A\tilde{x} - b\|^2 \to \text{minimal!}$$

$\Longrightarrow$ Least Squares = Literally für LSE ohne Lösung, die beste Approximation finden
↑ = Projektion

Least Squares

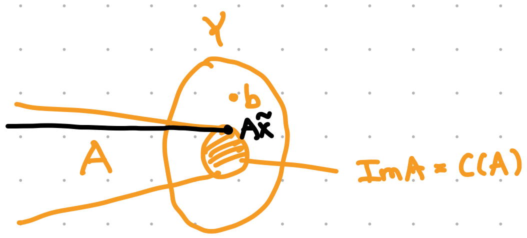
- Gegeben: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mit $\boxed{m > n}$ und $\boxed{\neg \exists x : Ax = b}$
- Gesucht: $\boxed{\text{Lösung } \tilde{x}}$ für $\boxed{A\tilde{x} = b}$

  mit $\boxed{\|A\tilde{x} - b\|^2 \to \text{minimal}}$ Das $\tilde{x}$ mit der kleinsten Norm $\|A\tilde{x} - y\|^2$

- Lösung: Normal equations: = b auf $C(A)$ projizieren

  $\boxed{A^T A \tilde{x} = A^T b}$ LSE lösen!

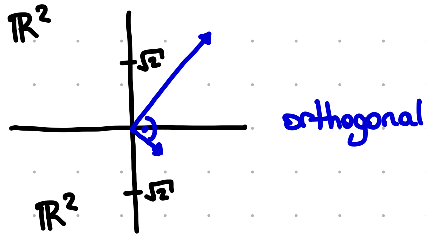
  ↳ falls A hat vollen rank: $\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$



- Es gilt für jede Matrix A:
  - $C(A) = C(AA^T)$
  - $C(A^T) = C(A^T A)$
  - $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank}(A^T A)$

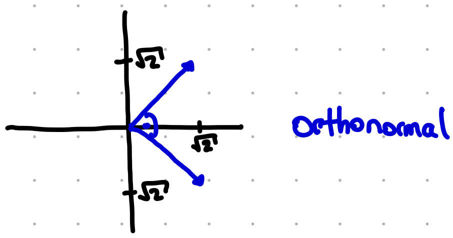
Orthonormalbasis

- Orthogonale Basis: $\boxed{\forall_{k,l} \langle x_k, x_l \rangle = 0 \text{ mit } k \neq l}$



- Orthonormale Basis: $\boxed{\text{Orthogonal und } \forall x \ \langle x, x \rangle = 1}$

- Kronecker-Delta: $\boxed{\delta_{kl} := \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ 1, & \text{falls } k = l \end{cases}}$



Gram-Schmidt

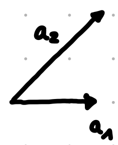
- Liefert zu einer Menge l.u. Vektoren eine orthonormale Menge, die den <u>selben</u> Raum aufspannen

- $\boxed{\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{l.u.}} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \underbrace{b_1, \dots, b_n}_{\text{orthonormal}}}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1, & \dots, & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{G-S}} Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1, & \dots, & b_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

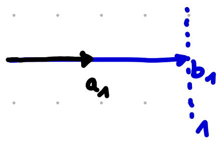
orthogonale Matrix

- Ablauf:

① 

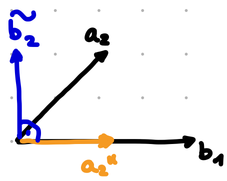
Start.

$\{a_1, a_2\}$ l.u

② 

$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

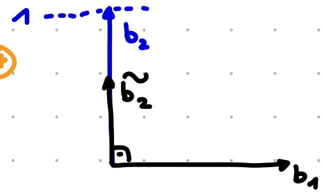
(a_1 normiert)

③ 

$\tilde{b}_2 = a_2 - \underbrace{\langle b_1, a_2 \rangle b_1}$

$a_2'' := \text{proj}_{b_1}(a_2)$

(a_2 ohne b_1 Richtung!)
↳ orthogonal zu b_1

④ 

$b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|}$

($\tilde{b}_2$ normiert)

↳ $\{b_1, b_2\}$ orthonormal

- <u>Allgemein</u>: Man subtrahiert die Projektionen auf allen berechneten b_j's, so ist $\tilde{b}_k$ orthogonal zu allen b_j's.

$$\tilde{b}_k = a_k - \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j}}_{\text{einzelne Projektion}}$$

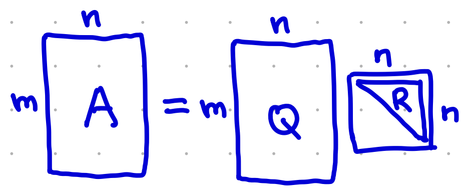
Orthogonale Matrix

- Eine Matrix A ist orthogonal falls $\boxed{A^{-1} = A^T}$ bzw. $AA^T = A^TA = I$

  ↳ eine orthogonale Matrix hat ortho**normale** Spalten!

QR-Decomposition

- Q ist eine Matrix mit orthonormalen Spalten
- R ist eine obere Dreiecksmatrix
- **Gegeben**: $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$ mit $m \geq n$, voller Rang
- **Gesucht**: Q, R mit $A = QR$

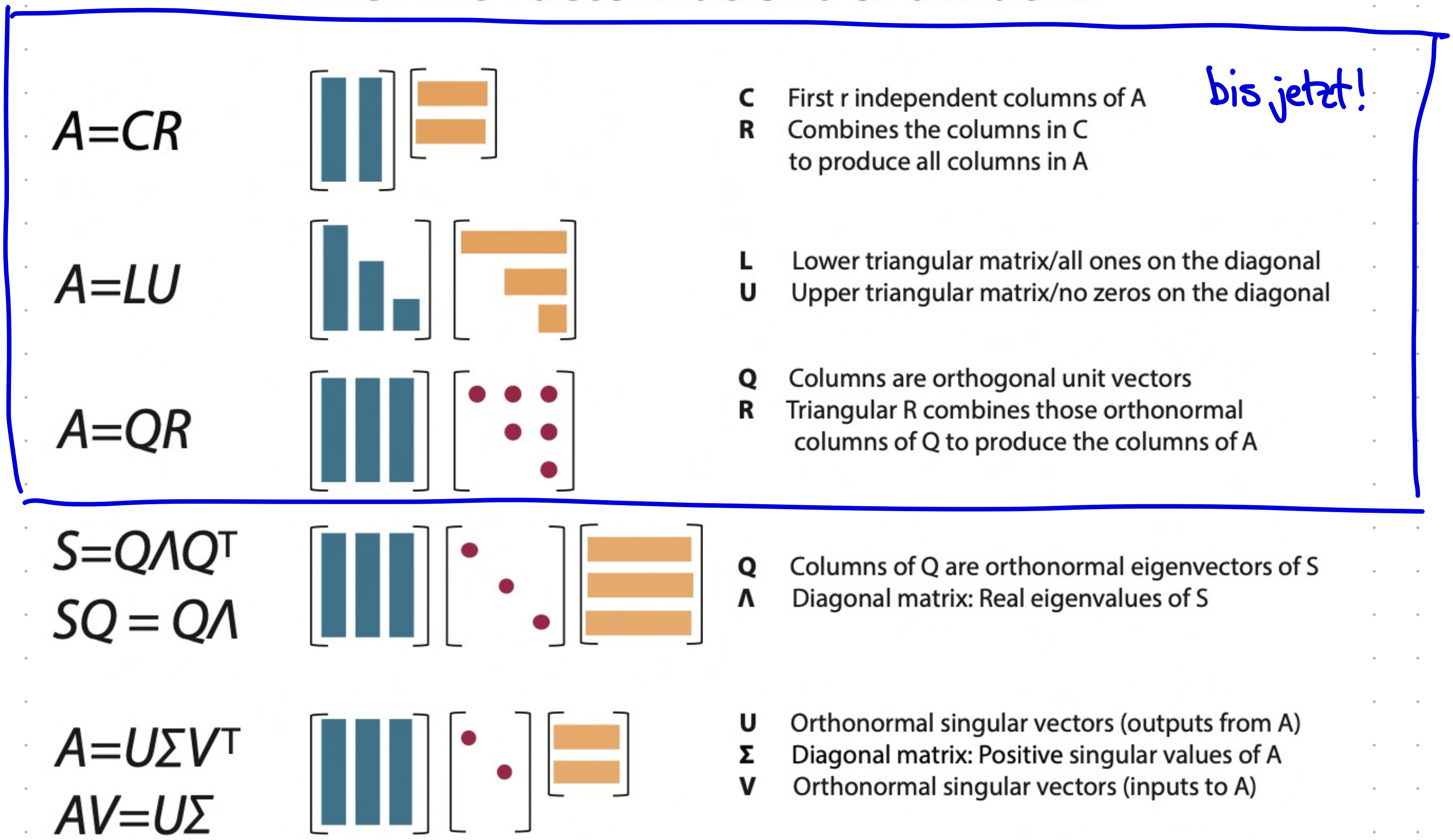


- Es gilt: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} Q$

  wobei mit $R = Q^TA \Rightarrow A = QR$.

- Daher folgt: $C(A) = C(Q)$

The Five Factorizations of a Matrix



4. Recap: A7

- Eure Lösungen
- Bin leider noch nicht dazu gekommen

- **Meine Lösung**

-

1. Orthogonal subspaces (hand-in) (★☆☆)

The exercises of this task can also be found in Section 4.1 of the blackboard notes.

Let V, W be orthogonal subspaces of $\mathbb{R}^n$.

a) Prove that $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

b) Recall that $V^\perp$ is the set of all vectors orthogonal to V, i.e.

$$V^\perp := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in V\}.$$

Prove that $V^\perp$ is a subspace of $\mathbb{R}^n$.

a) We know that if V, W are orthogonal,

then for any $v \in V, w \in W$: $v \cdot w = 0$.

$\Rightarrow$ Case $v, w \neq 0$: $\Rightarrow$ v and w are linearly independent

$\Rightarrow \{v\} \cap \{w\} = \emptyset$

Case $v \neq w$, $v = 0 \vee w = 0$: $\Rightarrow \{v\} \cap \{w\} = \emptyset$

Case $v = w = 0$: $\Rightarrow \{v\} \cap \{w\} = \{0\}$

Hence we get $V \cap W = \{0\}$. $\square$

b) We proof $V^\perp$ is too subspace of $\mathbb{R}^n$:

Let $v \in V$ be arbitrary.

(i) $0 \in V^\perp$:

$0 \cdot v = 0 \Rightarrow 0 \in V^\perp$

(ii) $\forall x, y \in V^\perp \Rightarrow (x+y) \in V^\perp$:

$(x+y)v = xv + yv = 0 + 0 = 0$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in V^\perp \Rightarrow (\alpha x) \in V^\perp$:

$(\alpha x)v = \alpha(xv) = \alpha \cdot 0 = 0$

From (i), (ii), (iii) follows $V^\perp$ is subspace of $\mathbb{R}^n$. $\square$

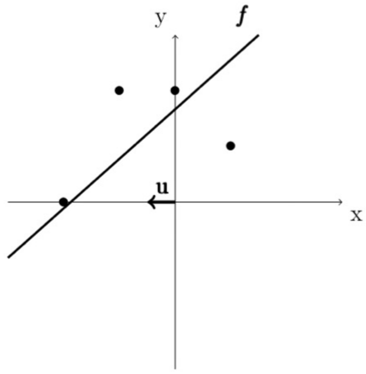
5. Aufgaben

▪ Linear Regression: Least Squares Anwendung

In einem Koordinatensystem sind vier Punkte (x, y): $(-2, 0)$, $(-1, 2)$ $(0, 2)$, $(1, 1)$ gegeben.

Sei $f : x \to y$ eine Funktion. Es gilt:

$$f(x) = mx + n, \quad m, n \in R$$



Hinweis: *Bitte verwenden Sie die Methode der kleinsten Quadrate zum Lösen der folgenden Aufgaben und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.*

b) $(\star\star)$ Bestimmen Sie α, sodass die Summe der quadrierten Abstände der vier Punkte zum Vektor v minimal ist.

(i) Wir haben gegeben Punkte (x,y): $(-2,0)$, $(-1,2)$, $(0,2)$, $(1,1)$

(ii) Wir wollen für jeden Punkt (x_i, y_i) dass $f(x_i) = y_i$ (f geht durch (x_i, y_i))

$\Rightarrow$ Gleichungen aufstellen: $f(x_i) = y_i$ bzw. $m x_i + n = y_i$

$$\left.\begin{aligned} m(-2)+n &= 0 \\ m(-1)+n &= 2 \\ m(0)+n &= 2 \\ m(1)+n &= 1 \end{aligned}\right\} \quad Ac=b: \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{}$$

Das LSE hat natürlich <u>keine</u> Lsg da es unmöglich ist für f jeden Punkt zu schneiden!

(iii) Lösen mit Normalgleichungen: $\Leftarrow$

Wir approximieren!

Mit $\hat{c}$ sodass $\|A\hat{c} - b\|^2 \to \min$

$\Rightarrow A^T A \hat{c} = A^T b$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Da $\operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow \operatorname{rang}(A^T A) = 2$ und $A^T A$ invertierbar

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det(A^T A)}_{24-4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{10}, \quad n = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{10} x + \frac{7}{5}.$$

<u>Denke daran:</u>

- $Ac = b$ ist die perfekte Lösung mit $\|Ac - b\|^2 = 0$

  ↳ beim aufstellen des LGS denken wir also noch gar nicht ans approximieren.

- Btw: hätten wir jetzt $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, wobei g ist eine Parabola

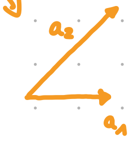
  $\Rightarrow$ Mit $(-2,0), (-1,2), (0,2), (1,1)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2(-2)^2 + a_1(-2) + a_0 &= 0 \\ a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 &= 2 \\ a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 &= 2 \\ a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 &= 1 \end{aligned}\right\} Ac = b: \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

Gegeben folgende Basis A von $U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $A = \{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}}_{a_2} \}$.

≠ Visuell ist Allgemein, nicht für das Beispiel...

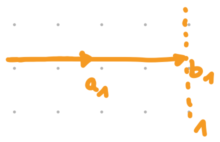


__Gesucht__: Orthonormalbasis $B = \{ b_1, b_2 \}$

__Lösung__: Gram-Schmidt

① $\boxed{b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}}} = \underline{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$

empfohlen!



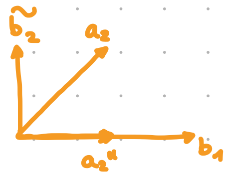
② $\tilde{b}_2 = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j = a_2 - \sum_{j=1}^{1} \langle b_j, a_2 \rangle b_j$

(Spick)

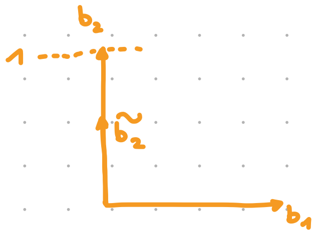
$$= \boxed{a_2 - \boxed{\langle b_1, a_2 \rangle b_1}} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

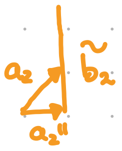
$$= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt2}(2+0+0)\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}}$$



③ $\boxed{b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|}} = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$





$\Rightarrow$ Orthonormale Basis von U ist $B = \{ \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix} \}$

6. Linear Transformations

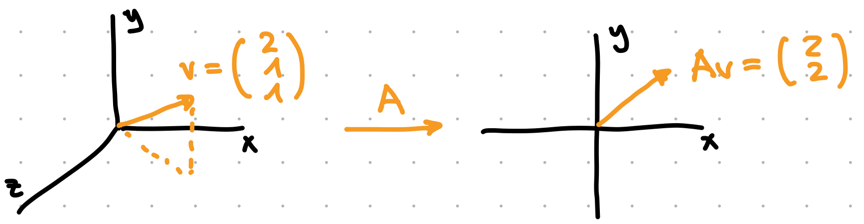
- Für jede Lineare Abbildungen $F: X \to Y$ gibt es eine Matrix A und andersrum!

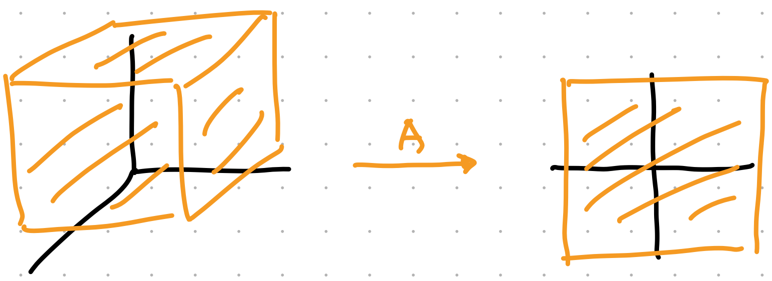
$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

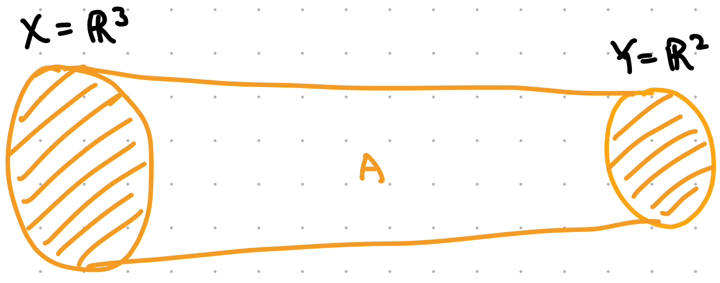
$$F\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ 2c \end{bmatrix} \qquad A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2c \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Daher gilt für die Matrix:



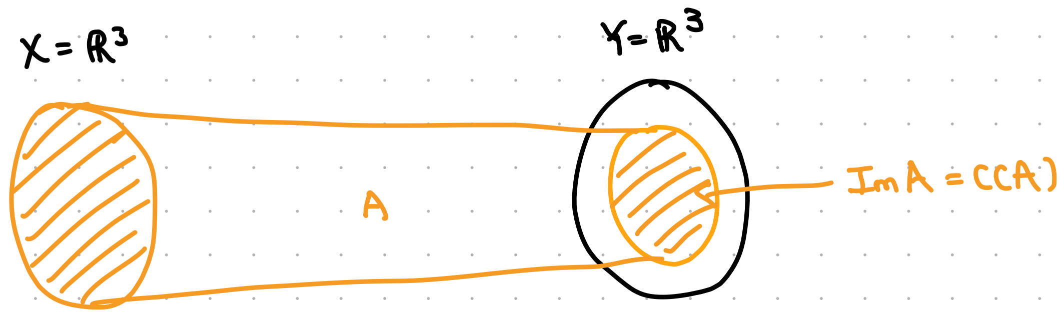




neu

- Sagen wir $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und A erreicht 2 Dimensionen ($\dim(\mathrm{Im}A = C(A)) = 2$)

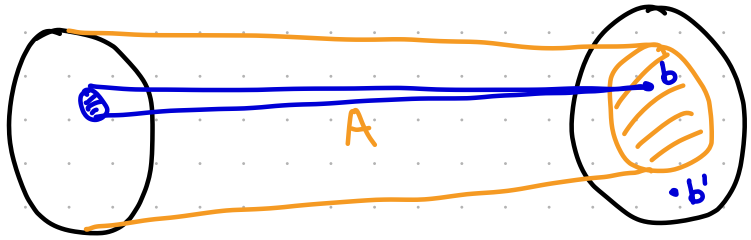
  ↳ wir haben:



↳ wir bemerken:

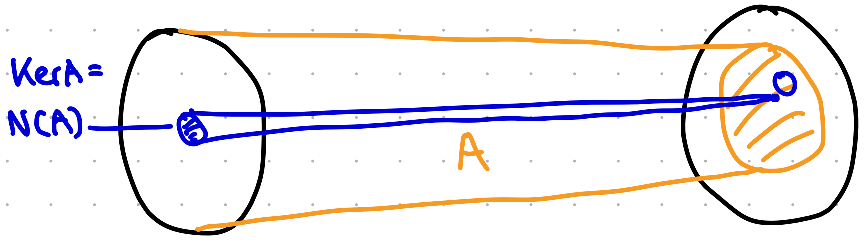
- A erreicht 2 Dimensionen, $\dim(\mathrm{Im}A) = \dim C(A) = 2$
- A <u>verliert</u> 1 Dimension!

↳ das heißt für jedes $b \in \mathrm{Im}A$: wir haben eine 1-Dim. Menge die auf b abbildet!



↳ daher hat $Ax = b$ $\begin{cases} \text{eine 1-Dim. Lösung für alle } b \in \mathrm{Im}A \\ \text{keine Lösung für alle } b' \notin \mathrm{Im}A \end{cases}$

↳ daher hat $Ax = 0$ auch eine 1-Dim Lösung da $0 \in \mathrm{Im}A$!



↳ daher gibt $\dim(N(A)) = 1$ die Dim. die wir verlieren und es gilt: $\mathcal{L}_b = x_b + \mathcal{L}_0$

partikulär von $Ax = b$

alle spezielle Lsgn $Ax = 0$

↳ daher gilt wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boxed{n = \underbrace{\dim(C(A))}_{r} + \dim(N(A))}$$

$\dim(N(A)) = n - r$

7. Nächste Woche (9)

- Moore-Penrose Inverse
- Linear Transformations
- (• Determinanten) ← maybe

8. Quiz

- Kahoot.it!