Lineare Algebra

Übungsstunde 9

1. Orga
2. GA
3. Priorisierte Wiederholung
4. Recap: A8
5. Test 2
6. Nächste Woche
7. Quiz

1. Orga

- Schaut euch 3 Blue 1 Brown an!
- Hat jmd. von euch heute Geburtstag? ^^

  ↳ (Überraschungs)test 2!

- Es gibt den TA-Award!

  ↳ mein nethz-Kürzel: kzheng

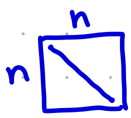
2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 8
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

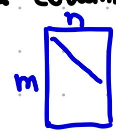
3. Priorisierte Whl.

Pseudoinverse

- A ist dann invertierbar, wenn A ist $\boxed{n \times n}$ Matrix und $\boxed{\text{rank} A = n}$ $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I$

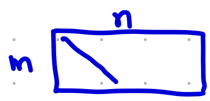


- Für $\boxed{m \times n}$ Matrizen definieren wir stattdessen die Pseudoinverse A^+:
  - ↳ Falls $\boxed{\text{rank} A = n}$ (voller column rank) $\Rightarrow \boxed{A^+ = (A^TA)^{-1}A^T}$

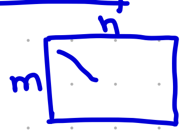
    $\Rightarrow A^+A = I$

    für LGS: least squares sol
  - ↳ Falls $\boxed{\text{rank} A = m}$ (voller row rank) $\Rightarrow \boxed{A^+ = A^T(AA^T)^{-1}}$

    $\Rightarrow AA^+ = I$

    für LGS: minimum norm sol
  - ↳ Falls $\boxed{\text{rank} A < n \wedge \text{rank} A < m}$ $\Rightarrow \boxed{A^+ = R^+C^+}$

    wobei $R^+ = R^T(RR^T)^{-1}$
    $C^+ = (C^TC)^{-1}C^T$

Wir approximieren die Inverse! (wenn keine existiert)

- Btw. man kann auch berechnen $\boxed{A^+ = V\Sigma^{-1}U^T}$, gilt für jede $m \times n$ Matrix

  ↑ SVD, kommt noch

Linear Transformations

- Eine Lineare Abbildung $\boxed{F: X \to Y}$ bildet Vektoren zwischen zwei Vektorräumen ab.
  - ↳ F ist deshalb linear, weil:

    (1) $\forall a, b \in X$: $\boxed{F(a+b) = F(a) + F(b)}$

    (2) $\forall \alpha \in \mathbb{F}, a \in X$: $\boxed{F(\alpha a) = \alpha F(a)}$

- Jede linear transformation kann mit einer „äquivalenten" Abbildungsmatrix A beschrieben werden.

  $\boxed{F: X \to Y \quad „\Leftrightarrow" \quad A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$ $\quad \forall x \; F(x) = Ax$

Intuition: Linear Tranformations — 1te

- Lineare Abbildungen $F: X \to Y$, sind nix anderes als Funktionen zwischen Vector Spaces

  z.B. Sei $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

  $$F\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ 2c \end{bmatrix}$$

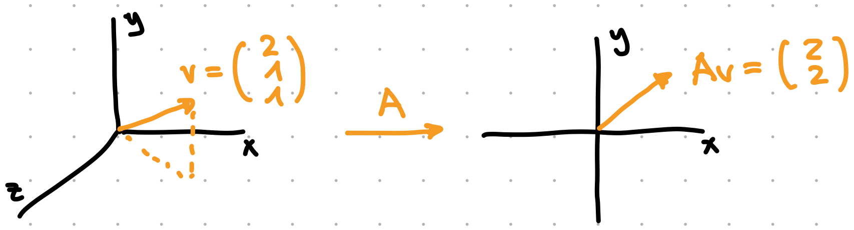
- Jetzt: Da sie linear sind kann man jede Lineare Abbildung als eine Matrix A schreiben!

  Wir haben $\forall F \exists A$: „$F \Leftrightarrow A$"

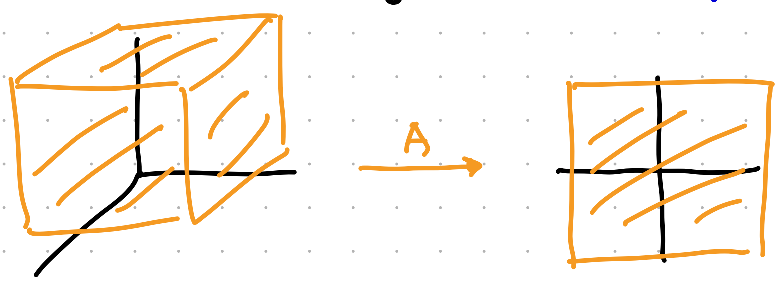
  $$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ mit}$$

  $$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2c \end{bmatrix} \text{ und } A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

- Mit anderen Worten: wir können uns Matrix Vektor Multiplikationen als Abbildungen / Transformationen vorstellen!



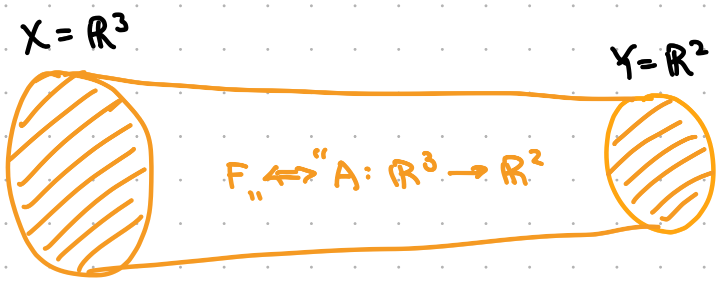
- Betrachten wir nun den ganzen Raum: (was passiert mit allen Vektoren des Definitionsraums $X = \mathbb{R}^3$)



↳ wie wir sehen: durch A/F verlieren wir eine Dimension!

↳ das macht Sinn da wir von 3D ($\mathbb{R}^3$) in den 2D ($\mathbb{R}^2$) bilden.

- Lass uns das generalisieren:

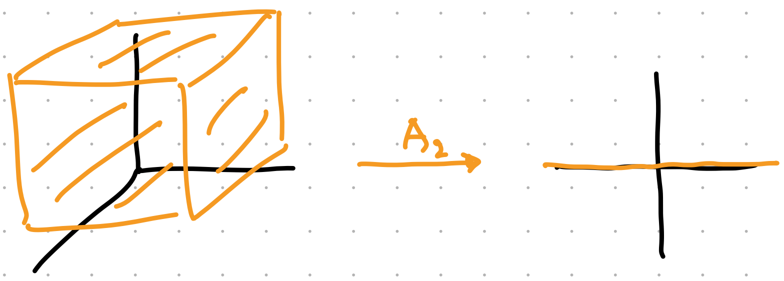


- Betrachten wir eine andere Abbildung F_2 mit A_2:

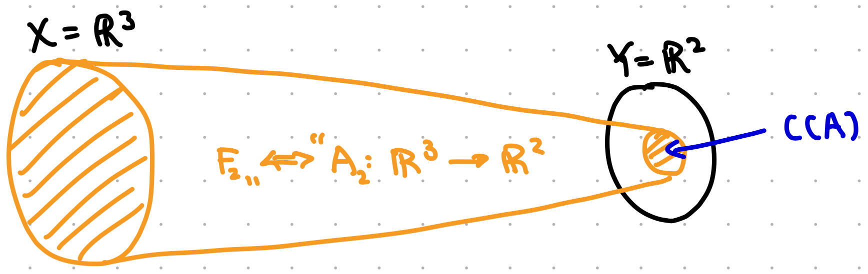
  Sei $F_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

  $$F_2\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  ↳ Jetzt verlieren wir eine weitere Dimension!



$\Rightarrow$



  ↳ Wie du siehst, es gibt viel zu analysieren mit Dimensionen, Räumen etc.

- wir bemerken:
  - A erreicht 2 Dimensionen, $\dim(\mathrm{Im}\,A) = \dim C(A) = 2$
  - A <u>verliert</u> 1 Dimension!

■ Essenz: Linear Transformations

- Wenn ihr das checkt → sehr nice!!
- Sonst wichtig ist mitzunehmen:

  (1) Dimensionsatz:

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} \dim X = & \dim C(A) & + & \dim N(A) & \\ n = & r & + & \#\text{freie Var} & , A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \text{Was wir haben} = & \text{Was wir erreichen} & + & \text{Was wir erhalten} & \end{array}}$$

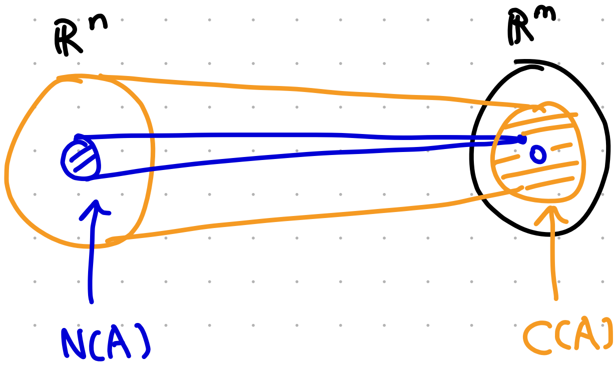
bzw.

$\Rightarrow \dim N(A) = n - r$

$(\dim N(A^T) = m - r)$

(2) Falls $A: X \to Y$ $N(A) \subseteq X$, $C(A) \subseteq Y$

bzw $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, $C(A) \subseteq \mathbb{R}^m$



$\Rightarrow$ Für z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ da $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, $A: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow N(A) \subseteq \mathbb{R}^5$, $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \dim N(A) = 4$, $\dim C(A) = 1$

entsprechend Basis $N(A)$: $\left\{ \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \right\}$, Basis $C(A)$: $\left\{ \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \right\}$

4. Recap: A7

- Eure Lösungen
-

- **Meine Lösung**

- **1. Gram-Schmidt (hand-in)** (★☆☆)

This task includes Challenge 20 from the lecture notes.

Consider the invertible matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Apply the Gram-Schmidt process to the columns of A.

a) Let $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, we calculate $Q = \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ orthogonal.

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} (0\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - \langle q_1, a_3 \rangle q_1 - \langle q_2, a_3 \rangle q_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Write down a QR-decomposition of A.

b) $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$

Da $A = QR$, $R = Q^T A$ $(Q^{-1} = Q^T)$!

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Apply the Gram-Schmidt process to the columns of B.

c) Siehe Musterlösung... Gute Übung tho ^^.

d) Is it always true that the Gram-Schmidt process on the columns of an upper triangular $n \times n$ matrix with non-zero diagonal entries yields the canonical basis $e_1, \ldots, e_n$? Provide a proof or counterexample. >0 *

Nur wenn wir annehmen dass diagonal entries sind >0 ^^

d) Yes. Let $a_1, \ldots, a_n$ denote cols of A and $q_1, \ldots, q_n$ be the orthonormal vectors from GS.

Proof by induction over k where after k steps we have $q_1, \ldots, q_k \Leftrightarrow e_1, \ldots, e_k$.

IB: $k = 1$: Since $a_1 = a_{11} \cdot e_1$ we see imm. $q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{a_{11} e_1}{\underbrace{|a_{11}|}_{>0}} = e_1$. nun >0 weil wir angenommen haben!

IS: For $m \in \mathbb{N}$ fixed and arbitrary we show that from

IH: $q_1, \ldots, q_m \Leftrightarrow e_1, \ldots, e_m$ follows $q_1, \ldots, q_{m+1} \Leftrightarrow e_1, \ldots, e_{m+1}$

$$\tilde{q}_{m+1} = a_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} \langle q_j, a_{m+1} \rangle q_j$$

$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x^T y$

$$\overset{(IH)}{=} a_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} \langle e_j, a_{m+1} \rangle e_j$$

$$= a_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} (e_j^T a_{m+1}) e_j$$

$$= a_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} a_{j\,m+1} \cdot e_j$$

Ab hier sehr formal, ich hätte in der Prüfung einen Satz geschrieben.

$$= a_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} a_{m+1} e_j$$

$$= a_{m+1} - a_{m+1} e_1 - \ldots - a_{m+1} e_m$$

$$= a_{m+1} - a_{m+1}(e_1 + \ldots + e_m)$$

$$= a_{m+1} \cdot e_{m+1}$$

$$\Rightarrow q_{m+1} = \frac{\tilde{q}_{m+1}}{\|\tilde{q}_{m+1}\|} = \frac{a_{m+1} e_{m+1}}{\|a_{m+1} e_{m+1}\|} = \frac{\overbrace{a_{m+1\,m+1}}^{\text{nun } >0} e_{m+1}}{\underbrace{|a_{m+1\,m+1}|}_{>0}} = e_{m+1} \quad \square$$

5. Test 2

Test 2 - Schlüsselthemen

Aufgabe 1 (Recap Basics)

5 7 Zeile zuerst

1) A 7×5 matrix has $\boxed{7}$ rows.

4 2 4 2 $m \times \underline{n} \cdot \underline{n} \times p$

2) Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, then $A \cdot B$ is defined, if B is a $\boxed{4}$ $\times 4$ matrix.

3) Let A be a $n \times n$ matrix. A is invertible, iff $rankA = n - \boxed{0}$. $rank A = n$

4) Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. A has $\boxed{1}$ free variable(s) and $\boxed{2}$ pivot(s).

freie Var

$ref A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

pivots

5) For any A and x, the homogeneous linear systems of equations ($Ax = 0$) always has at least $\boxed{1}$ solution(s). $A0 = 0$ gilt immer

6) Let $x = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$. Then $\min_{i\in\{1,\dots,4\}} |x \cdot e_i| = \boxed{2}$ and $\arg\min_{i\in\{1,\dots,4\}} |x \cdot e_i| = \boxed{1}$.

$\hat{x} = \underset{x}{\arg\min} \|Ax - b\|^2$

$|x \cdot e_i| = |x_i| = \begin{cases} 2 & i=1 \\ 4 & i=2 \\ 6 & i=3 \\ 8 & i=4 \end{cases}$

$\min |x_i| = |2| = 2$

$\underset{i}{\arg\min} |x_i| = 1$

7) Let $A = CR$ where C contains the r linearly independent columns of A. We know that R has 2 rows, then $r = \boxed{2}$.

$C: m \times r$

$R: r \times n$

Summe: 20

Aufgabe 2 (Schlüssel)

u, v orthonormal $\Rightarrow$ u, v lin ind. da $\mathbb{R}^2 \Rightarrow w$ muss lin dep. sein

1) Let $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ and u, v be orthonormal. Then $dim(span\{u, v, w\}) = \boxed{2}$.

2) Let $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$ be a vector space. A basis of V has exactly $\boxed{6}$ vectors.

Basis $\mathbb{R}^{3\times 2}$:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

3) Given a spanning set S of a subspace U of $\mathbb{R}^{10}$. We know $|S| = 4$, then $dimU \leq \boxed{4}$ and $dimU \geq \boxed{1}$.

$|S| = 4 \Rightarrow U$ hat max. 4 dim. (alle lin. dep.)

4) Given a set M of vectors in a vector space V with $dimV = 2$. We know $\exists x \in M$ with $\underbrace{span(M - \{x\}) = V}$. M has at least $\boxed{3}$ vector(s).

$\Rightarrow$ erzeugend $\Rightarrow$ mind 2.
aber lin dep. $\Rightarrow$ mind 3.

an sich wäre $\{0\}$ auch ein spanning set für $U = \{0\}$ sub space of $\mathbb{R}^{10}$
Jedoch $|\{0,0,0,0\}| = 1 = |\{0\}|$
daher muss $S = \{v\}$ mit $U = span\{v\}$

$\Rightarrow \dim U \geq 1.$

$b_1, \dots, b_n$ of a vector space V

Die Basis beschreibt jeden Vektor eindeutig

5) Given any basis. For all vectors there exists $\boxed{1}$ linear combination(s) from the basis vectors.

$v \in V$

6) Let $U \subseteq \mathbb{R}^3$. U is a subspace of $\mathbb{R}^3$, if $U = \{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, a+b+c = \boxed{0}\}$.

(i) $0 \in U$! geht nur wenn $a+b+c=0$

7) Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation and A the transformation matrix. A has $\boxed{3}$ rows und $\boxed{2}$ columns. $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

8) Given $Ax = b$, ref$(A) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Then we know any b has $\boxed{3}$ dimension(s) of solutions x.

$\Rightarrow$ 3 freie Var $\Rightarrow \dim N(A) = 3 \Rightarrow L_b = x_b + L_0$

dim 3 $\Leftarrow$ dim 3

9) Given $Ax = b$, ref$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Then any basis of $C(A)$ has $\boxed{2}$ vector(s) and any basis of $N(A)$ has $\boxed{1}$ vector(s).

pivots = rank A = 2 = $\dim C(A)$ = # vectors in basis $C(A)$

freie Var = 1 = $\dim N(A)$ = # vectors in basis $N(A)$

10) Let $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ be a linear transformation and A the transformation matrix with $dimC(A) = 3$. Then $dimN(A) = \boxed{2}$

$\dim X = \dim \mathbb{R}^5 = 5 = \dim C(A) + \dim N(A)$

$\Rightarrow \dim N(A) = 5 - 3 = 2.$

Summe: 30

Summe Insgesamt: $20 + 30 = 50$

6. Nächste Woche (10)

- Determinanten
  - Permutation
- Eigenwerte und Eigenvektoren (Einleitung)

7. Quiz