Lineare Algebra

Übungsstunde Final

1. Orga
2. GA
3. Final Summary
4. Prüfungsvorbereitung
5. Final Test
6. Schluss

1. Orga

- Wir sind am Ende des Semesters angekommen!
  - ↳ für die letzten beiden Ü-Stunden hab ich mir überlegt:

    (Heute, 13.12): • (Alle) Themen abschliessen

    (NW, 21.12): • Summary von allen Themen
    • Prüfungsvorbereitung

    — — — — — — Pause

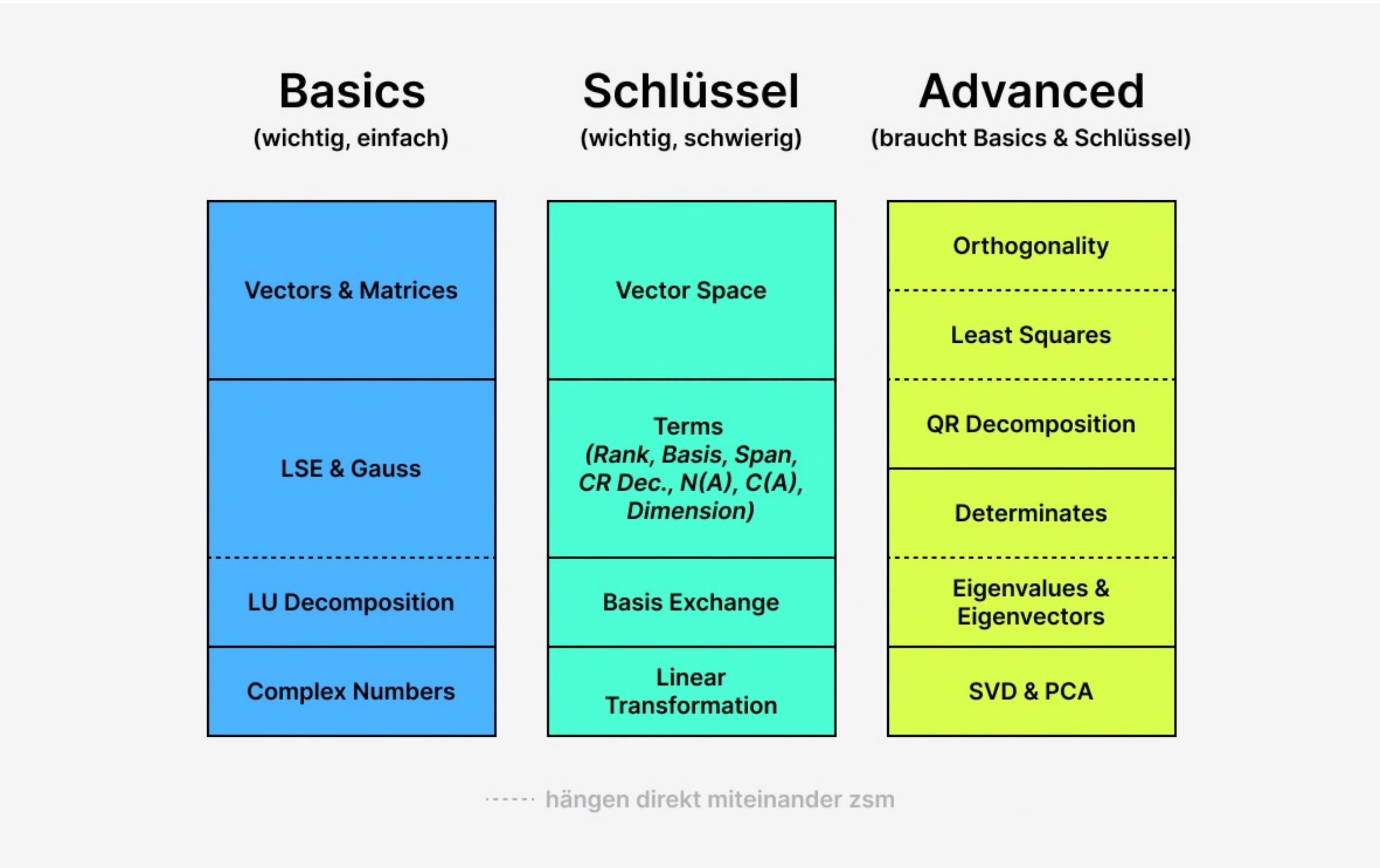
    • Final Test
    • Schluss

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Alle Themen
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

3. Final Summary

- Im Schlaf
- Beherrschen
- Spick, wissen dass es existiert



BASICS

Vectors ∧ Matrices

- Matrix — Zeile zuerst, $m \uparrow$ $\xrightarrow{n}$, A_{ij} = (elem: row i, col j)
  - Special Matrices — I, 0, Diagonal, Triangular, Quadratic, ...
  - Calculation Rules — left → right, $AB \neq BA$, $m \times n \cdot n \times p$, ...
  - Transpose / Inverse — A^T / $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
  - Symmetric / Orthogonal — $A^T = A$ / $A^{-1} = A^T$, $AA^T = A^TA = I$

- Scalarproduct — $x \cdot y = \langle x, y \rangle = x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
  - Norm — $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
  - Angle — $\alpha = \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$
    - Orthogonal — $x \perp y \iff x \cdot y = 0$
  - Cauchy-Bujakovski-Schwarz — $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

LSE ∧ Gauss

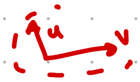
- Over / underdetermined — Over: $A = [\quad]$, Under: $A = [\qquad]$
- Gaussian Elimination — $A \xrightarrow{\text{Gauss}} \mathrm{ref}(A)$
  - Elimination Matrices — $\mathrm{ref}(A) = U = E_{32} E_{31} E_{21} A$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Row-Echelon-Form — $A \xrightarrow{\text{Gauss}} \mathrm{ref}(A) = [\;0\;]$
    - Reduced-Row-Echelon-Form — $A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \mathrm{rref}(A)\ [\;0\;]$
    - Rank — $\mathrm{rank}\, A = \#$ Pivots of A, Pivots: $[\;*\;\;*\;]$
    - Free Variables — Free Var: $[\quad]$
  - Solution Space — $\mathcal{L}_b = \{x \mid Ax = b\}$, $\mathcal{L}_b$ "$\in$" $\{0, 1, \infty\}$
- LU-Decomposition — $A = LU$, $L = [\;] = E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}$, $U = [\;]$
  - Permutation Matrices — $PA = LU$
  - Symmetric LU-Decomposition — $A = LDL^T$

Complex Numbers

- Complex Numbers — $z = x + iy$
  - Conjugate — $\bar{z} = x - iy$, $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
  - Modulus (Norm) — $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - Polar forms — $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

SCHLÜSSEL

Vector Spaces

- Vector Space — $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots$ over Field $\mathbb{R}$
  - Field — $\mathbb{R}$
  - Subspace — $U \subseteq \mathbb{R}^n$ subspace iff (i) $0 \in U$, (ii) $u,v \in U \Rightarrow (u+v) \in U$, (iii) $\alpha \in \mathbb{R}, u \in U \Rightarrow (\alpha u) \in U$
- Linearcombination — $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
  - Span — Set of all LC, $\text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^2$
  - Linear (In-)dependence — Ind: u,v  , Dep: u,v 
  - Spanning Set — $\text{span}(S)$ = Vectorspace
  - Basis — $\text{span}(B)$ = Vectorspace + B is lin. ind.
  - Dimension — # Vectors in Basis of Vectorspace
  - CR-Decomposition — $A = CR$, $C(A) = C(C)$, C is lin. ind. A
- Fundamental Subspaces — $N(A) = C(A^T)^\perp$, $N(A^T) = C(A)^\perp$
  - Column Space — $C(A) = \{Ax \mid x \in V\}$, $\dim C(A) = \text{rank } A = r$
  - Null Space — $N(A) = \{x \mid Ax = 0\}$, $\dim N(A) = \#$ freie Var $= n - r$
  - Row Space — $C(A^T) = R(A) = \{A^T x \mid x \in V\}$, $\dim R(A) = r$
  - Left Nullspace — $N(A^T) = \{x \mid A^T x = 0\}$, $\dim N(A^T) = m - r$

Linear Transformations

- Linear Tranformation — $F: X \rightarrow Y$ is linear iff (i) $F(u) + F(v) = F(u+v)$, (ii) $F(\alpha u) = \alpha F(u)$
  - Transformation Matrix — A „$\Leftrightarrow$" F, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
  - Definition Space, Image Space — DS: X, IS: Y
- Image (Columnspace) — $\text{Im } F = C(A) \subseteq Y$, „was wir erreichen"
- Kernel (Nullspace) — $\text{Ker } F = N(A) \subseteq X$, „was wir verlieren"
- „Dimensionssatz" — $\dim X = \dim C(A) + \dim N(A)$
  „was wir hatten = was wir erreichen + was wir verlieren"

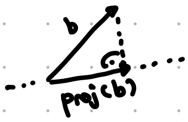
Basis Exchange

- Basis ∧ Vector Space — $[x]_B \neq [x]_{B'}$
- Basis ∧ Transformation Matrix — $A_B \neq A_{B'}$
- Linear Transformation with Basis Exchange $\Rightarrow A_B = T A_{B'} T^{-1}$, $T :=$ Exchange Matrix
  vllt. Diagonal

ADVANCED

Orthogonality

- Projection



$\text{proj}_U(b) = \underset{p \in U}{\text{argmin}} \|b - p\|$
  - Projection onto vector — $\text{proj}_a(b) = \frac{aa^T}{a^T a} b$
  - Projection onto subspace — $\text{proj}_U(b) = (A^T A)^{-1} A^T b$ (if A full rank)
- Least squares — A overdet., $\|A\tilde{x} - b\|^2 \to$ minimal
  - Normal equations — $A^T A \tilde{x} = A^T b$
- Pseudoinverse — $\approx A^{-1}$, $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \,/ = A^T (A A^T)^{-1} \,/ = R^+ C^+$
- Orthonormality — orthogonal + normalized
- Orthonormal Basis — $\forall v \in$ Basis: v orthonormal
- Orthogonal Subspaces — $U \perp W$ iff $\forall u \in U, w \in W: u \cdot w = 0$
- Orthogonal Complement — Orth. Subspace + $\dim U + \dim W = \dim V$
- Gram-Schmidt — $\text{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$ (l.u.) $\xrightarrow{\text{G-S}}$ $\text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$ (orthonormal)
- QR-Decomposition — $A = QR$, Q orthogonal, $R = [\,\text{◹}\,]$
  A full rank.

Determinants

- Formal Definition — $\det A = ad - bc \;|\; = aei + bfg + cdh - afh - \dots$
- Geometric Intuition — $\det A = 0$ iff $\text{rank} A < n$, $\det = 1$: „Fläche" bleibt
- Properties (die Propositions...) — $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, $\det A^T = \det A$, ...
- Special Cases — $|\diagdown| = |\ddots| = \text{—}$, $|\diagup| = -\text{—}$, ...
- Expantion along row col / Gauss — $|\text{-}\!\circ\!\text{-}| = * \,|\;|+*|\;|$ / $\det A = (-1)^k \cdot \det U$

Eigenvalues ∧ Eigenvectors

- Eigenvalues — $Av = \lambda v \Rightarrow \lambda$ is EW
- Eigenvectors — all v such that $Av = \lambda_i v$ for λ_i !
- Characteristic Polynom — $\chi_\lambda(A) = \det(A - I\lambda)$, $\chi_\lambda(A) = 0 \Rightarrow \lambda$
    - Fundamental Theorem of Algebra — $(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda) \Rightarrow \exists$ always ≥ 1 root
- Geometric ∧ algebraic Multiplicity — Geo: # l.u. EV des EW, Alg: Grad k mit $(\lambda_i-\lambda)^k$
- Trace — $Tr A = \sum A_{ii}$
- Similar Matrices — iff $\exists T: A = TBT^{-1}$ bzw. $\chi_\lambda(A) = \chi_\lambda(B)$
- Eigenvalue Decomposition — $A = V \Lambda V^{-1}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \ddots \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots \end{bmatrix}$
- Symmetric Matrices + EV — $A = V\Lambda V^T$ possible
    - Positiv Definit — $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0: x^T A x > 0$

SVD ∧ PCA

- Singular value Decomposition — $A = U\Sigma V^T$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}$
- Principle Component Analysis

Rest

- Gram - Matrix
- Cholesky Decomposition
- Matrix Norms

Important

es kann unvollständig sein

- ↑ ist bloß ne Summary von allen Topics (bitte selbst alle Themen durchgehen!)
    - ↳ für Linalg sind <u>Aufgabentypen</u> vor allem entscheidend dass ihr sie könnt!
    - z.B.: $C(A), N(A)$ bestimmen, $\det A$ bestimmen, ist F eine linear transf. ?, ...

EMPFOHLEN!

4. Prüfungsvorbereitung

- Ich bin der Meinung, jede erfolgreiche Prüfungsvorbereitung beinhaltet folgende zwei Punkte:

  [1] Alle Themen durchgehen und zsmfassen

  - Big Picture bekommen, Strukturieren, Zusammenhänge der Themen erkennen, ...
  - Priorisieren, Fokus auf das, was am meisten zählt

  [2] Altprüfungen lösen

  - So viele wie möglich lösen und analysieren
  - Alle Aufgabentypen strukturieren
  - <u>Prüfungssimulation</u>: spart euch welche auf

    ↳ bei mir: ich lerne mit HS22 ∧ reserviere FS23/HS21 für Simulation

    - die restlichen löse ich normal

  loop

- Jeder lernt aber individuell! Nehmt das, was auch für euch funktioniert

  ↳ trzdm, man kommt nicht um [1] ∧ [2] rum!

- Spick
  - Spick von anderen zu nehmen keine gute Idee
  - 1 zu 1 abschreiben schlechte Idee
  - Ich würde alles nochmal durchgehen und parallel die zsmfassung schreiben
  - Erfahrungsgemäß beste Stragie für den Spick:
    - Mini-Skript
    - Kochrezepte
    - Cheat-Sheet

    Achtung: nicht zu perfektionistisch sein, ich bin selbst reingefallen...

- Beispiele

Spick ist wichtig aber üben > Spick

(Siehe Analysis Zsmfassung von mir)

5. Final Test

Kurze Bemerkung:

- Es soll ein Schock sein, ETH Prüfungen sind nicht easy
  - ↳ Ich habe extra so gestaltet dass ihr Time Pressure habt
    + Ihr habt keinen Spick gehabt
  - ↳ Ihr habt 1 Monat Zeit, es ist eine lange Zeit!!

1. (20 points) Calculations

a) (10 points) Given the following systems of equations $Ax = b$ with

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solve this LSE with $\alpha = 2$ and $\beta = 9$. For which values of α and β does this LSE have zero, one or infinite solutions?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right] -3\mathrm{II} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Aus III}: & x_3 = 0 \\ \mathrm{II}: & x_2 = \frac{3}{2} \\ \mathrm{I}: & x_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha & 3 \\ 0 & 6 & 3 & \beta \end{array}\right] -3\mathrm{II} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & 3-3\alpha & \beta-9 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ genau eine: $\alpha \neq 1$

keine: $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 9$

∞-viele: $\alpha = 1 \wedge \beta = 9$

$[\,0 \;\; 0 \;\; \neq 0 \,|\, \text{egal}\,]$ genau eine

$[\,0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, \neq 0\,]$ keine

$[\,0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, 0\,]$ ∞-viele

b) (10 points) Let B be a 2×2 matrix with

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalize B, that is, find a diagonal matrix Λ and matrix V such that $B = V\Lambda V^{-1}$.

EW:

$$\chi_\lambda(B) = \det(B - I\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$$

EV λ_1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) +I \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = t \end{array} \Rightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

EV λ_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) -I \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = -t \end{array} \Rightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sonst falls EV normalized:

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T}_{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

2. (20 points) Proofs

a) (10 points) Let Q be a orthogonal matrix. Show that for any vectors $x \cdot y = Qx \cdot Qy$, that is, orthogonal matrices preserve the dot product.

$$Qx \cdot Qy$$

$$= (Qx)^T Qy$$

$$= x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} y$$

$$= x^T y$$

$$= x \cdot y \quad \square$$

b) (10 points) If A is a square matrix, show that AA^T and A^TA are similar.
Hint: Start with the SVD of A, $A = U\Sigma V^T$.

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T$$

$$\Rightarrow AA^T = U\Sigma \underbrace{V^T V}_{I} \Sigma^T U^T$$

$$= U\Sigma\Sigma^T U^T$$

$$= U\Sigma^2 U^T$$

$$\Rightarrow A^TA = V\Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I} \Sigma V^T$$

$$= V\Sigma^T\Sigma V^T$$

$$= V\Sigma^2 V^T$$

If AA^T and A^TA similar, then $\exists X$ such that

$$AA^T = XA^TAX^{-1}$$

$$\Leftrightarrow U\Sigma^2U^T = XV\Sigma^2V^TX^{-1}$$

Let $X = (UV^T)$:

$$(UV^T)V\Sigma^2V^T(UV^T)^{-1}$$

$$= U\underbrace{V^TV}_{I}\Sigma^2\underbrace{V^T(V^T)^{-1}}_{I}U^{-1}$$

$$= U\Sigma^2U^{-1}$$

$$= U\Sigma^2U^T \quad \square$$

3. (20 points) Quiz

a) [t] [f] (10 points) Let A be a $n \times n$ matrix with $rank A < n$. Which of the following statements are true [t] or false [f]?

- ☒ ○ A is not invertible.
- ☒ ○ There exists a nonzero vector x such that $Ax = 0$.
- ☒ ○ The column vectors of A are linearly dependent.
- ☒ ○ The row vectors of A are linearly dependent.
- ☒ ○ $\dim C(A) < n$.
- ☒ ○ $\dim N(A) > 0$.
- ☒ ○ $\dim C(A^T) + \dim N(A^T) = n$. (Sei $B = A^T$, Dimensionssatz)
- ☒ ○ There is no orthogonal matrix Q with $A = QR$. Nur wenn A full rank (regular)
- ☒ ○ $\det(A) = 0$.
- ☒ ○ At least one eigenvalue of A is zero.

^^

b) [**t**] [**f**] (5 points) Let A be a real 3×3 matrix and $b \in \mathbb{R}^3$. Which of the following statements are true [**t**] or false [**f**]?

- ○ ⊗ $\{(a \quad b \quad c)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, a+b+c=1\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin$ Set
- ○ ⊗ $\{(a^2 \quad b \quad a)^T \in \mathbb{R}^3\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$. Counter ex: $-1u \notin$ Set $\Rightarrow$ ↯(iii)
- ⊗ ○ $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -x\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$.
- ○ ⊗ $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax = 0\}$ is a subspace of $C(A)$. $N(A) \subseteq X$, $R(A) \subseteq Y$
- ○ ⊗ $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = A^\dagger y\}$ is a subspace of $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax = y\}$ where $A^\dagger$ is the pseudoinverse of A.

subset ✓

c) (5 points) Let a_1, a_2, a_3 be three linearly independent vectors, columns of matrix $A = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)$. If $\det(A) = 5$, then the matrix $B = (a_3 + a_1 + a_2 \quad a_1 + a_2 + a_3)$ has following determinant:

=

- ○ 10
- ☒ 0
- ○ -30
- ○ 5

6. Schluss

- Final Fragen?
- Last Empfehlung:

  ↳ Vergisst nie – es ist geil die ETH ist so schwierig! ← Enjoyed it!

- Danke! Hat mir echt Spaß gemacht mit euch!

- Viel Erfolg bei den Prüfungen!

Ihr schafft das!